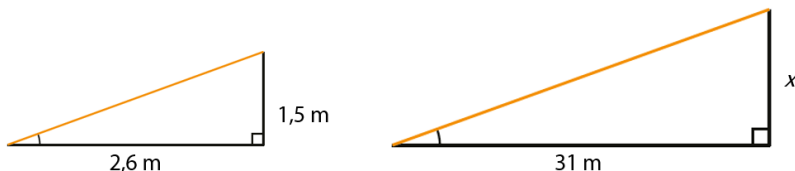


2.1

Merkitään puun pituutta kirjaimella x .

Piirretään mallikuviot.



Valonsäteiden ja maanpinnan välinen kulma on molemmissa kolmioissa yhtä suuri. Lisäksi kepin ja maanpinnan välinen kulma on yhtä suuri kuin puun ja maanpinnan välinen kulma. Siten kolmiot ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

Kootaan tiedot taulukkoon.

	Varjo (m)	Pituus (m)
Keppi	2,6	1,5
Puu	31	x

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{2,6}{31} = \frac{1,5}{x}$$

Vastinpituuksien suhteet ovat yhtä suuret.
Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x \approx 18 \text{ (m)}$$

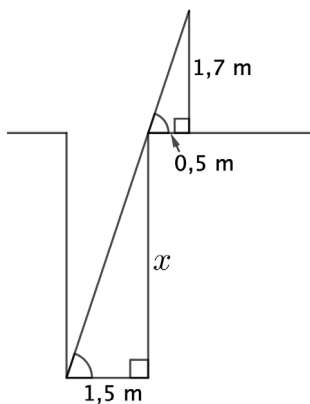
Puun pituus on 18 m.

Vastaus

18 m

2.2

Merkitään kuopan syvyyttä kirjaimella x . Piirretään mallikuvio.



Kuvaan merkityt kulmat ovat kolmioissa yhtä suuret. Siten kolmiot ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

Kootaan tiedot taulukkoon.

	Kanta (m)	Korkeus (m)
Kuoppa	1,5	x
Rasmus ja varjo	0,5	1,7

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{1,5}{0,5} = \frac{x}{1,7}$$

Vastinpituuksien suhteet ovat yhtä suuret.
Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 5,1 \text{ (m)}$$

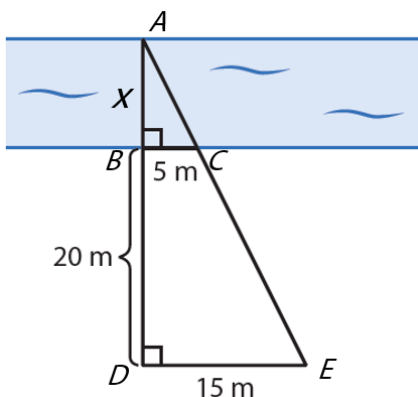
Kuopan syvyys on 5,1 m.

Vastaus

5,1 m

2.3

Merkitään joen leveyttä kirjaimella x .



Kolmioilla ABC ja ADE on yhteinen kulma A ja lisäksi molemmissa kolmioissa on suora kulma. Siten kolmiot ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

Kootaan tiedot taulukkoon.

	Kulman A viereinen kateetti (m)	Kulman A vastainen kateetti (m)
Kolmio ABC	x	5
Kolmio ADE	$x + 20$	15

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan joten leveys x .

$$\frac{x}{x + 20} = \frac{5}{15}$$

Vastinpituuksien suhteet ovat yhtä suuret.
Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 10 \text{ (m)}$$

Joen leveys on 10 m.

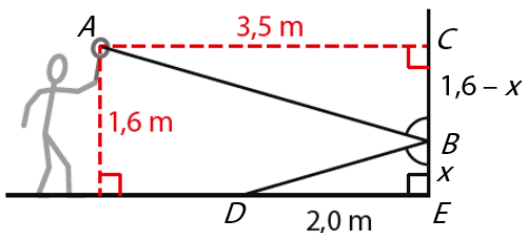
Vastaus

10 m

2.4

Täydennetään mallikuvaa.

Merkitään pallon seinään osumiskorkeutta kirjaimella x .



Kolmioissa CAB ja EDB on kummassakin suorakulma, ja pisteessä B sijaitsevat pallon tulo- ja lähtökulmat ovat yhtä suuret. Siten kolmiot ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

Kootaan tiedot taulukkoon.

	Kulman B vastainen kateetti (m)	Kulman B viereinen kateetti (m)
Kolmio ABC	3,5	$1,6 - x$
Kolmio BDE	2,0	x

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{3,5}{2,0} = \frac{1,6 - x}{x}$$

Vastinpituuksien suhteet ovat yhtä suuret.
Ratkaistaan CAS-laskimella.

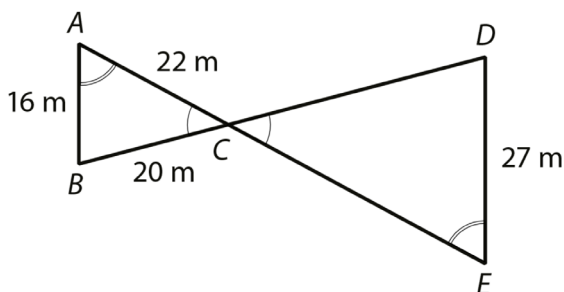
$$x \approx 0,58 \text{ (m)}$$

Lyönti tulee tähdätä korkeudelle $0,58 \text{ m} = 58 \text{ cm}$.

Vastaus

58 cm

2.5



Kolmioissa ABC ja EDC on yhtä suuret ristikulmat ja yhtä suuret samankohtaiset kulmat. Siten kolmiot ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

Kootaan tiedot taulukkoon.

	Ristikulman C vastainen sivu (m)	Vastinkulmien A ja E vastainen sivu (m)
Kolmio ABC	16	20
Kolmio EDC	27	CD

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan janan CD pituus.

$$\frac{16}{27} = \frac{20}{CD}$$

Vastinpituuksien suhteet ovat yhtä suuret.

$$16 \cdot CD = 27 \cdot 20 \quad |:16$$

$$CD = \frac{27 \cdot 20}{16}$$

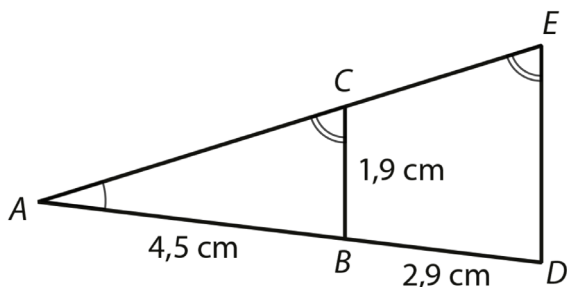
$$CD \approx 34 \text{ (m)}$$

Janan CD pituus on 34 m.

Vastaus

34 m

2.6



Kolmioilla ABC ja ADE on yhteinen kulma ja yhtä suuret samankohtaiset kulmat. Siten kolmiot ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

Kootaan tiedot taulukkoon.

	Vastinkulmien C ja E vastainen sivu (cm)	Kulman A vastainen sivu (cm)
Kolmio ABC	4,5	1,9
Kolmio ADE	$4,5 + 2,9 = 7,4$	DE

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan sivun DE pituus.

$$\frac{4,5}{7,4} = \frac{1,9}{DE}$$

Vastinpituuksien suhde on vakio.

$$4,5 \cdot DE = 7,4 \cdot 1,9 \quad |:4,5$$

$$DE = \frac{7,4 \cdot 1,9}{4,5}$$

$$DE \approx 3,1 \text{ (cm)}$$

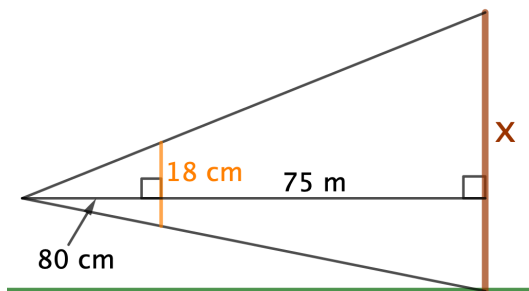
Janan DE pituus on 3,1 cm.

Vastaus

3,1 cm

2.7

Piirretään mallikuva. Merkitään puun korkeutta kirjaimella x .



Kolmioissa on yhteinen kulma ja yhtä suuret samankohvaiset kulmat. Siten kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

Kootaan tiedot taulukkoon.

	Korkeus	Etäisyys
Kynä (cm)	18	80
Puu (m)	x	75

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{18}{x} = \frac{80}{75} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = 16,875 \text{ (m)}$$

Puun korkeus on $16,875 \text{ m} \approx 17 \text{ m}$.

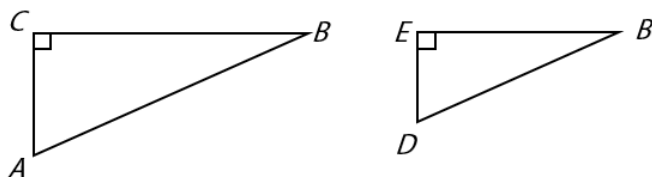
Vastaus

17 m

Huomaa, että voit myös muuttaa ensin kaikki mitat samaan pituusyksikköön.

2.8

Piirretään kolmiot erilleen toisistaan ja samaan asentoon.



- a) Kolmion DEB kulman B vastinkulma kolmiossa ABC on kulma B .

Vaihtoehto 2 on oikea.

- b) Kolmion DEB kulman E vastinkulma kolmiossa ABC on kulma C .

Vaihtoehto 3 on oikea.

- c) Kolmion DEB sivun DE vastinsivu kolmiossa ABC on sivu AC .

Vaihtoehto 2 on oikea.

- d) Kolmion DEB sivun DB vastinsivu kolmiossa ABC on sivu AB .

Vaihtoehto 1 on oikea.

Vastaus

- a) 2
- b) 3
- c) 2
- d) 1

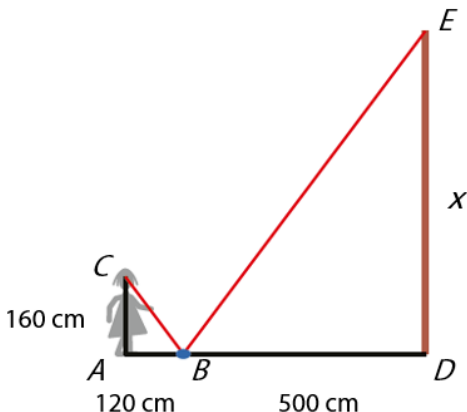
2.9

Muutetaan kaikki mitat senttimetreiksi.

$1,2 \text{ m} = 120 \text{ cm}$ ja $5,0 \text{ m} = 500 \text{ cm}$

Merkitään sähköpylvään korkeutta kirjaimella x .

Täydennetään mallikuvaa.



Kolmioissa ABC ja BDE on kummassakin suora kulma. Pisteessä B olevat tulo- ja heijastuskulma ovat yhtä suuret. Siten kolmiot ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

Kootaan tiedot taulukkoon.

	Kulman B viereinen kateetti (cm)	Kulman B vastainen kateetti (cm)
Kolmio ABC	120	160
Kolmio BDE	500	x

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{120}{500} = \frac{160}{x}$$

Vastinpituuksien suhteet ovat yhtä suuret.

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x \approx 670 \text{ (cm)}$$

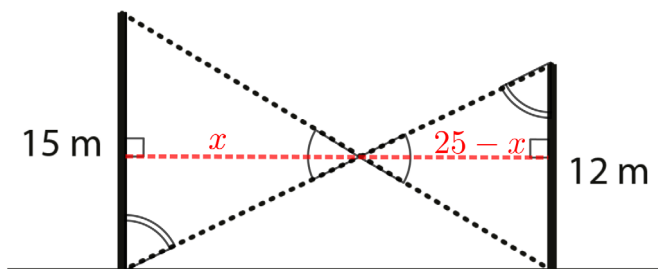
Sähköpylvään korkeus on $670 \text{ cm} = 6,7 \text{ m}$.

Vastaus

6,7 m

2.10

Täydennetään mallikuvaa. Merkitään vaijereiden leikkauspisteen etäisyyttä korkeammasta pylväästä kirjaimella x .



Kolmioissa on yhtä suuret ristikulmat ja yhtä suuret samankohtaiset kulmat. Siten kolmiot ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{x}{25 - x} = \frac{15}{12} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$x \approx 14 \text{ (m)}$$

Leikkauspisteen etäisyys korkeammasta pylväästä on 14 m.

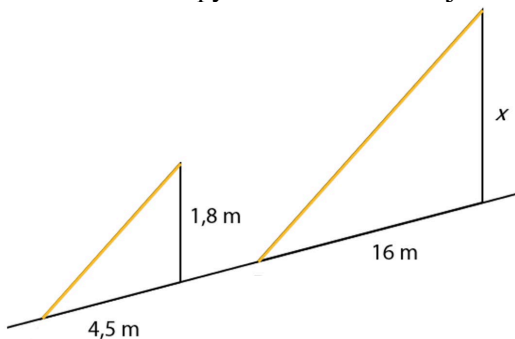
Vastaus

14 m

2.11

Muunnetaan tikun pituus metreiksi: $180 \text{ cm} = 1,8 \text{ m}$.

Merkitään sähköpylvään korkeutta kirjaimella x . Piirretään mallikuva.



Valonsäteiden ja maanpinnan välinen kulma on molemmissa kolmioissa yhtä suuri. Lisäksi kepin ja maanpinnan välinen kulma on yhtä suuri kuin sähköpylvään ja maanpinnan välinen kulma. Siten kolmiot ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

Kootaan tiedot taulukkoon.

	Varjo (m)	Pituus (m)
Tikku	4,5	1,8
Sähköpylväs	16	x

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{4,5}{16} = \frac{1,8}{x}$$

Vastinpituuksien suhteet ovat yhtä suuret.
Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 6,4 \text{ (m)}$$

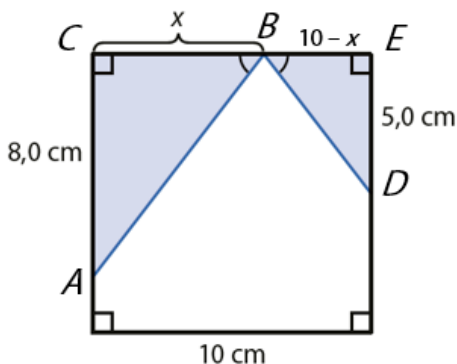
Sähköpylvään korkeus on 6,4 m.

Vastaus

6,4 m

2.12

Täydennetään mallikuvaa.



Molemmissa kolmioissa on suora kulma ja lisäksi yhtä suuret kulmat B . Siten kolmiot ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

Kootaan tiedot taulukkoon.

	Kulman B viereinen kateetti (cm)	Kulman B vastainen kateetti (cm)
Kolmio ABC	x	8,0
Kolmio BDE	$10 - x$	5,0

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{x}{10 - x} = \frac{8,0}{5,0}$$

Vastinpituuksien suhteet ovat yhtä suuret.
Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x \approx 6,2 \text{ (cm)}$$

Sivun pituus $x \approx 6,2$ cm.

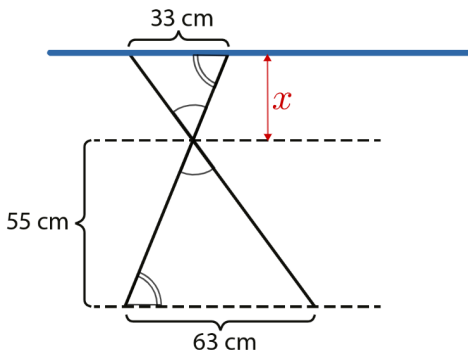
Vastaus

6,2 cm

2.13

Merkitään nivelkohdan etäisyyttä silityslaudasta kirjaimella x . Tällöin silityslaudan korkeus lattiasta on $55 + x$ (cm).

Täydennetään mallikuvaa.



Kolmioissa on yhtä suuret ristikulmat ja yhtä suuret samankohtaiset kulmat. Siten kolmiot ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

Verrantoyhtälö voidaan muodostaa kolmioiden korkeuksien ja ristikulmaa vastassa olevien sivujen perusteella. Kootaan tiedot taulukkoon.

	Ristikulmaa vastassa oleva sivu (cm)	Korkeus (cm)
Alempi kolmio	63	55
Ylempi kolmio	33	x

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{63}{33} = \frac{55}{x}$$

Vastinpituuksien suhde on yhtä suuri.
Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x \approx 28,810 \text{ (cm)}$$

Silityslaudan korkeus lattiasta on

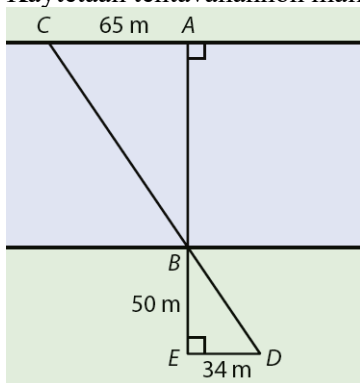
$$55 \text{ cm} + 28,810 \text{ cm} = 83,810 \text{ cm} \approx 84 \text{ cm}.$$

Vastaus

84 cm

2.14

Käytetään tehtävänannon mallikuvaa.



Molemmissa kolmioissa on suora kulma ja lisäksi pisteessä B olevat ristikulmat ovat yhtä suuret. Siten kolmiot ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

Kootaan tiedot taulukkoon.

	Kulmaa B vastassa oleva kateetti (m)	Kulman B viereinen kateetti (m)
Kolmio BED	34	50
Kolmio BAC	65	AB

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan joen leveys AB .

$$\frac{34}{65} = \frac{50}{AB}$$

Vastinpituuksien suhteet ovat yhtä suuret.
Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$AB \approx 96 \text{ (m)}$$

Joen leveys on 96 m.

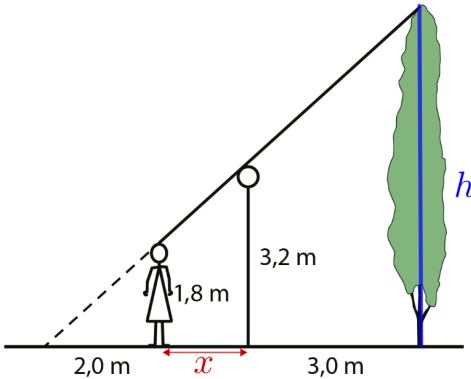
Vastaus

96 m

2.15

Merkitään Helmin etäisyyttä lyhtypylvästä kirjaimella x , ja puun korkeutta kirjaimella h .

Täydennetään mallikuvaa.



Kaikissa kolmessa kolmioissa on yhteinen kulma ja lisäksi kaikissa on suora kulma. Siten kaikki kolme kolmiota ovat keskenään yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

- a) Muodostetaan verrantoyhtälö kahden pienimmän kolmion perusteella ja ratkaistaan x .

$$\frac{1,8}{3,2} = \frac{2,0}{2,0 + x}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x \approx 1,5556 \text{ (m)}$$

Helmin etäisyys valaisinpylvästä on $1,5556 \text{ m} \approx 1,6 \text{ m}$.

- b) Muodostetaan verrantoyhtälö pienimmän ja suurimman kolmion perusteella ja ratkaistaan h .

$$\frac{1,8}{h} = \frac{2,0}{2,0 + 1,5556 + 3,0}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$h \approx 5,9 \text{ (m)}$$

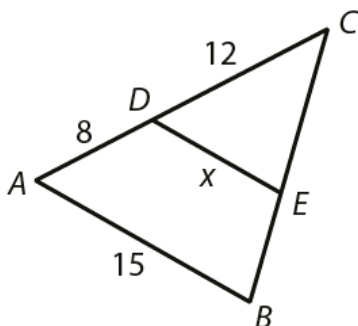
Puun korkeus on $5,9 \text{ m}$.

Vastaus

- a) 1,6 m b) 5,9 m

2.16

- a) Kolmioilla ABC ja DEC on yhteinen kulma (C) ja yhtä suuret samankohtaiset kulmat (esimerkiksi B ja E). Siten kolmiot ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.



Kootaan tiedot taulukkoon.

	Yhteisen kulman C vastainen sivu	Samankohtaisten kulmien E ja B vastaiset sivut
Kolmio ABC	15	$8 + 12 = 20$
Kolmio DEC	x	12

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{15}{x} = \frac{20}{12}$$

Vastinpituuksien suhteet ovat yhtä suuret.

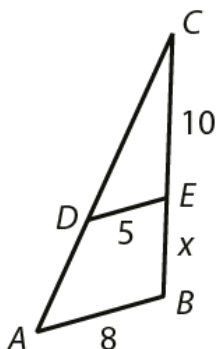
$$20 \cdot x = 15 \cdot 12 \quad | : 20$$

$$x = \frac{15 \cdot 12}{20}$$

$$x = 9$$

Pituus $x = 9$.

- b) Kolmioilla ABC ja DEC on yhteinen kulma (C) ja yhtä suuret samankohtaiset kulmat (esimerkiksi A ja D). Siten kolmiot ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.



Kootaan tiedot taulukkoon.

	Yhteisen kulman C vastainen sivu	Samankohtaisten kulmien A ja D vastaiset sivut
Kolmio ABC	8	$x + 10$
Kolmio DEC	5	10

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{8}{5} = \frac{x+10}{10} \quad \text{Vastinpituuksien suhteet ovat yhtä suuret.}$$

$$5 \cdot (x + 10) = 8 \cdot 10$$

$$5x + 50 = 80 \quad | -50$$

$$5x = 30 \quad | :5$$

$$x = 6$$

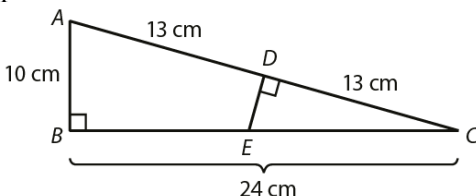
Pituus $x = 6$.

Vastaus

a) $x = 9$ b) $x = 6$

2.17

Kolmioilla ABC ja EDC on yhteinen kulma C , ja kummassakin kolmiossa on suora kulma. Kolmiot ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.



Kootaan janan DE pituuden ratkaisemiseen tarvittavat tiedot taulukkoon.

	Yhteisen kulman C vastainen kateetti (cm)	Toinen kateetti (cm)
Kolmio ABC	10	24
Kolmio EDC	DE	13

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan janan DE pituus.

$$\frac{10}{DE} = \frac{24}{13}$$

Vastinpituuksien suhteet ovat yhtä suuret.

$$24 \cdot DE = 10 \cdot 13 \quad | : 24$$

$$DE = \frac{10 \cdot 13}{24}$$

$$DE \approx 5,4 \text{ (cm)}$$

Janan DE pituus on 5,4 cm.

Kootaan janan CE pituuden ratkaisemiseen tarvittavat tiedot taulukkoon.

	Yhteisen kulman C ja suoran kulman välinen kateetti (cm)	Hypotenuusa (cm)
Kolmio ABC	24	$13 + 13 = 26$
Kolmio EDC	13	CE

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan janan CE pituus.

$$\frac{24}{13} = \frac{26}{CE}$$

Vastinpituuksien suhteet ovat yhtä suuret.

$$24 \cdot CE = 13 \cdot 26 \quad | : 24$$

$$CE = \frac{13 \cdot 26}{24}$$

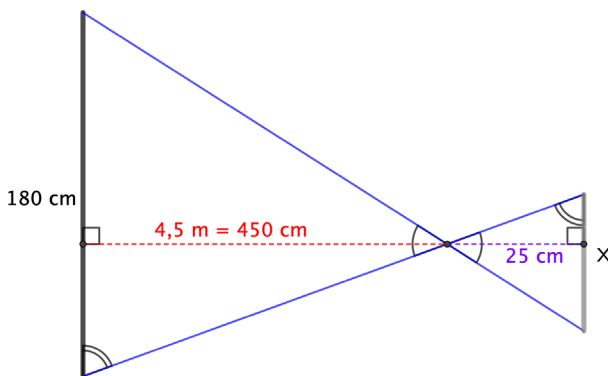
$$CE \approx 14 \text{ (cm)}$$

Janan CE pituus on 14 cm.

Vastaus $DE \approx 5,4 \text{ cm}$ ja $CE \approx 14 \text{ cm}$

2.18

- a) Piirretään mallikuva. Merkitään henkilön korkeutta valokuvassa kirjaimella x .



Kolmioissa on yhtä suuret ristikulmat ja yhtä suuret samankohtaiset kulmat. Siten kolmiot ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

Kootaan tiedot taulukkoon.

	Etäisyys (cm)	Korkeus (cm)
Henkilö	450	180
Valokuva	25	x

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

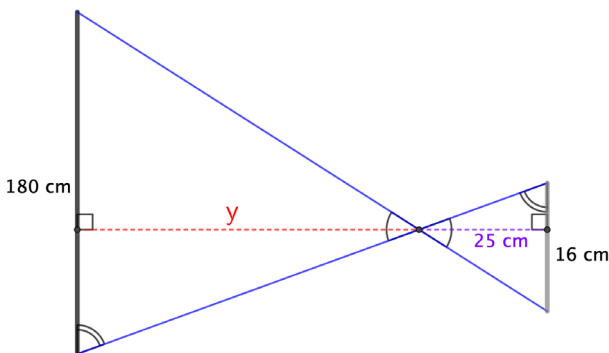
$$\frac{450}{25} = \frac{180}{x}$$

Vastinpituuksien suhteet ovat yhtä suuret.
Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 10 \text{ (cm)}$$

Henkilön korkeus valokuvassa on 10 cm.

- b) Muutetaan a-kohdan kuvaa vastaamaan b-kohdan tilannetta. Merkitään henkilön etäisyyttä kamerasta kirjaimella y .



Kootaan janan pituuden x ratkaisemiseen tarvittavat tiedot taulukkoon.

	Etäisyys (cm)	Korkeus (cm)
Henkilö	y	180
Valokuva	25	16

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{x}{25} = \frac{180}{16}$$

Vastinpituuksien suhteet ovat yhtä suuret.
Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x \approx 280 \text{ (cm)}$$

Henkilön tulee olla kamerasta vähintään $280 \text{ cm} = 2,8 \text{ m}$ etäisyydellä kamerasta.

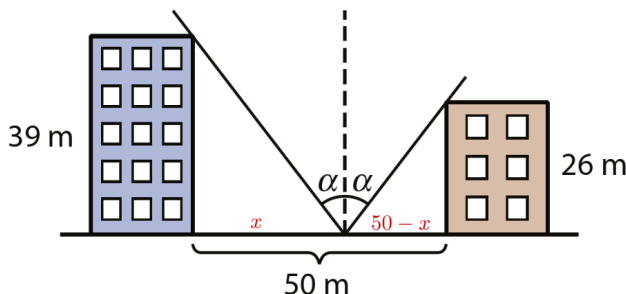
Vastaus

a) 10 cm

b) vähintään 2,8 m

2.19

Täydennetään tehtävänannon kuvaa. Merkitään kysytyn pisteen etäisyyttä korkeammasta talosta kirjaimella x .



Molemmissa kolmioissa on suora kulma. Lisäksi molemmissa kolmioissa hypotenuusan ja maanpinnan välinen kulma on yhtä suuri. Siten kolmiot ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

Kootaan tiedot taulukkoon.

	Etäisyys (m)	Korkeus (m)
Korkeampi talo	x	39
Matalampi talo	$50 - x$	26

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{x}{50 - x} = \frac{39}{26}$$

Vastinpituuksien suhteet ovat yhtä suuret.
Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 30 \text{ (m)}$$

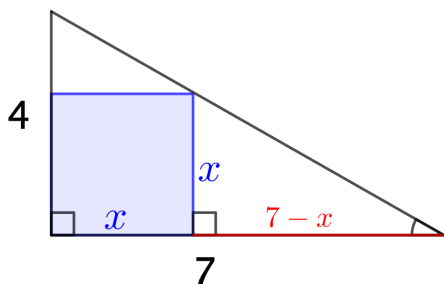
Molempiin suuntiin avautuu yhtä suuri kulma, kun etäisyys korkeammasta talosta on 30 m.

Vastaus

30 m

2.20

Piirretään mallikuva. Merkitään neliön sivun pituutta kirjaimella x .



Kolmioissa on yhteinen kulma ja suorat kulmat. Siten kolmiot ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

Kootaan tiedot taulukkoon.

	Yhteisen kulman viereinen kateetti (cm)	Yhteistä kulmaa vastassa oleva kateetti (cm)
Pienempi kolmio	7,0	4,0
Koko kolmio	7,0 - x	x

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{7,0}{7,0 - x} = \frac{4,0}{x}$$

Vastinpituuksien suhteet ovat yhtä suuret.
Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x \approx 2,5 \text{ (cm)}$$

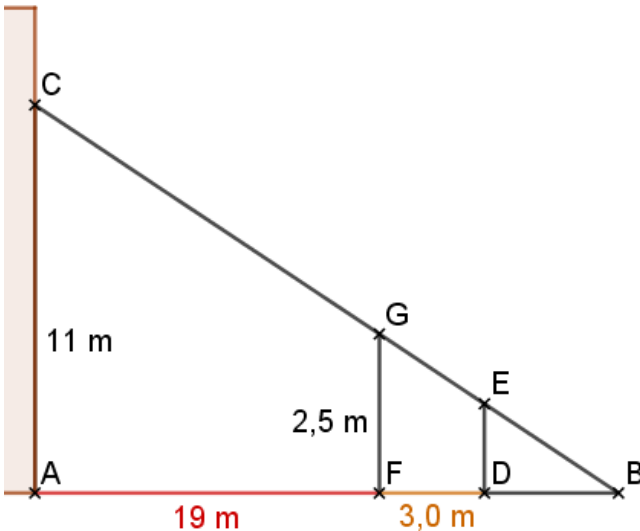
Neliön sivun pituus on 2,5 cm.

Vastaus

2,5 cm

2.21

Piirretään mallikuva.



Kolmiot ABC , FBG ja DBE ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

- Yhteinen kulma B .
- Kaikissa on suora kulma.

Tavoitteena on laskea janan DE pituus. Ratkaistaan tätä varten ensin janan DB pituus.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan DB .

$$\frac{11}{2,5} = \frac{19 + 3,0 + DB}{3,0 + DB} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$DB \approx 2,5882 \text{ (m)}$$

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan DE .

$$\frac{2,5}{3,0 + 2,5882} = \frac{DE}{2,5882}$$

$$DE = 1,1579 \text{ (m)}$$

Lyhin lapsi, jonka Mikko voi nähdä on $1,1579 \text{ m} = 115,79 \text{ cm}$. Koska pihalla leikkivä lapsi on vain 105 cm pitkä, ei Mikko voi nähdä lasta.

Vastaus

Ei voi.